19 兩則算術遊戲

19.1 移動遊戲

假設遊戲者為甲、乙兩人且甲先玩，並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數N者算贏(動彈不得或故意讓累加的數字超過所給定的數字N者算輸)。問：哪些正整數N，乙方有必勝的策略？並證明你的答案。

19.2 495 真美！

給定一個數字不全相同的三位數,把它的數字重新排列,會得到最大與最小的兩個數(例如：給定 207，得到的最大數為 720，最小數是 027)。將最大數減去最小數得到一個新的三位數，這個過程稱為一次操作。以 207 為例，經過多次操作之後有如下的結果

$$207 \to 720-027=693 \to 963-369=594 \to$$
$$954-459=495 \to 954-459=495 \to \text{ 都是495.}$$

是否其它的三位數（數字不能全相同）也都有這樣的結果？

19.3 移動遊戲、495 真美！參考解答

【移動遊戲解答】我們可以發現前 3 個數字N為$7, 13=7+6$及$20=7+6+7$（需仔細檢查此三種數字為何會贏)。事實上，N的值有如下雙等差的關係：

$N=7, 7+6=13, 7+6+7=20, 7+6+7+6=26, \cdots\cdots.$

證明是這樣的：設數列

$$a_1=7, a_2=7+6=13, a_3=7+6+7=20, \cdots \text{依此類推。}$$

只需檢驗$N=a_{n+2}$時，乙（後玩者）皆有辦法佔到a_{n+1}或a_n二數中至少一數；如此下去便可遞推至$a_1=7$及$a_2=13$的顯然情形了。

【495 真美！解答】答案是肯定的，證明如下。不妨設三位數為 $abc(a \ge b \ge c, a \ne c)$，那麼一次操作之後為

$$\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c} \to abc - cba = \underline{a-c-1}\ \underline{9}\ \underline{10+c-a}.$$

因為 $(a-c-1)+(10+c-a)=9$，所以只要針對 990, 891, 782, 693, 594 五位數字進行操作即可。由

$$\begin{aligned} &990 \to 990-099=891 \to 981-189=792 \\ &\to 972-279=693 \to 963-369=594 \to 954-459=495 \end{aligned}$$

得證。

習題 19.1　若將移動遊戲中的 1, 2, 3, 4, 5 改為

$$1, 2, 3.$$

結果又如何？

習題 19.2　若將移動遊戲中的 1, 2, 3, 4, 5 改為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

那結果又如何？

習題 19.3　若將移動遊戲中的 1, 2, 3, 4, 5 改為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

那結果又如何？

習題 19.4　（握手問題）阿山夫妻參加一個宴會，連阿山夫妻，共四對夫妻參加。已知在宴會中，夫妻彼此不互相握手且任兩人至多握手一次。當宴會結束後，阿山詢問每一個人與多少人握過手，結果每個人（不包含阿山本人）回答的數字都不一樣。試問在這次宴會中，阿山與多少人握過手？

習題 19.5　兩人輪流玩改變箭號方向的遊戲，規定每人每次須將所有箭號中的一個依順時針或逆時針方向旋轉九十度。當出現兩個（或超過兩個）相鄰的箭號方向一致時，可以每次消去兩個箭號，直到沒有相鄰且相同的箭號為止。最後將所有的箭號消失者獲勝。如下的例子，試問：先玩者或是後玩者有必勝的策略？

$$\uparrow \downarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \uparrow$$

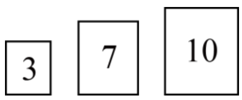
【移動遊戲註解】如果將遊戲一的 1, 2, 3, 4, 5 改為$1,2,3,\cdots,n$，則我們猜想後玩者會贏的數列 $w_i (w_0 = 0)$ 如下：當 $n+1=2^{2p}(2q+1)$ 時，

$$w_{i+1} = w_i + (n+1).$$

至於其餘的情況，有賴讀者繼續研究與猜測。

動手玩數學

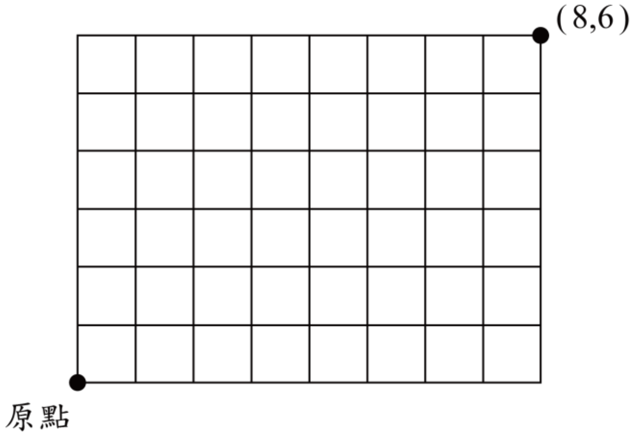
某人僅有 10 公升、7 公升及 3 公升的量杯各一個，其中 10 公升的量杯裝滿了水。請問：在不將水倒離三個量杯外的情形下，應如何操作才能量得剛好五公升的水。又至少需幾次才能完成？



挑戰題

這是一則很好玩的遊戲的特例，我們稱這個遊戲為“一子棋”。事實上，它是中國有名的遊戲“拈”的另一種玩法。

如下圖：它是一個8×6的棋盤。



今甲、乙兩人將一子棋子放置在棋盤的右上角（即座標是(8,6)）的位置。遊戲規則是這樣的：甲、乙兩人輪流將棋子依下列三種容許的方式在棋盤上移動（每次都必須從三種容許的移動方法中選擇一種使棋子移動，不可將棋子停留在原位置不動）

(1) 將棋子往正下方移動任意格。

(2) 將棋子往正左方移動任意格。

(3) 將棋子往左下方對角線的方向移動任意格。

誰將棋子移動到原點就算他贏；如果你是玩者之一，你會選擇先玩或者後玩呢（每個人都想當天生贏家）？如果棋盤改為 8 ×□且知道後玩者一定有辦法贏得這種“一子棋”的遊戲。你能知道正整數□的值是那些嘛？

完美的二元數列猜想

如果數列 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是一個 n 階數列，其中 $a_i \in \{1,-1\}$，我們定義一個新的整數數列 $b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 如下：

$$\begin{cases} a_{i+n} &= a_i, \\ b_k &= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{i+k}. \end{cases}$$

例如四階數列 $a=\{1,1,1,-1\}$ 時

$$b=\{0,0,0,4\};$$

四階數列 $a=\{-1,-1,-1,1\}$ 時

$$b=\{0,0,0,4\}.$$

如果新的數列 $b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 滿足

$$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{n-1}=0;b_n=n$$

則稱 n 階數列 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是一個 n 階完美數列。例如四階數列

$$a=\{1,1,1,-1\},\{-1,-1,-1,1\}$$

就是兩個 4 階完美數列；事實上，這也是截至目前為止所僅知的兩個完美數列。數學家猜想沒有其它的完美數列。這個猜想自從數學家阿達馬引進所謂的阿達馬方陣（一種與此猜想等價的特殊矩陣的敘述）以來，一直未被解決。